
LE COMPLÉMENTAIRE DES PUISSANCES n -IÈMES DANS UN CORPS DE NOMBRES EST UN ENSEMBLE DIOPHANTIN

par

Jean-Louis Colliot-Thélène & Jan Van Geel

Résumé. — Le cas $n = 2$ de l'énoncé du titre est un théorème de B. Poonen (2009), qui utilise une famille à un paramètre de variétés et un théorème sur l'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels de ces variétés dû à Coray, Sansuc et l'un des auteurs (1980). Pour $n = p$ premier quelconque, on dispose d'une famille de variétés analogues, qui ont été considérées par A. Várilly-Alvarado et B. Viray (2012). Nous obtenons le résultat annoncé en remplaçant ladite famille par sa puissance symétrique $(2p + 1)$ -ième, et en appliquant un théorème sur l'obstruction de Brauer-Manin pour les points rationnels de telles puissances symétriques reposant sur des travaux de l'un des auteurs avec Swinnerton-Dyer (1994) et avec Skorobogatov et Swinnerton-Dyer (1998), qui généralisent un travail de Salberger (1988).

Samenvatting. — Voor $n = 2$ is de bewering in de titel een stelling van B. Poonen (2009). Hij gebruikt een één-parameter familie van variëteiten, en een stelling van Coray, Sansuc en één van de auteurs (1980), over de Brauer-Manin obstructie voor de rationale punten van deze variëteiten. Voor $n = p$, p een willekeurig priemgetal, beschouwden A. Várilly-Alvarado en B. Viray (2012) een analoge familie van variëteiten. We bewijzen de bewering in de titel door deze familie te vervangen door de $(2p + 1)$ -de symmetrische macht ervan en door een stelling over de Brauer-Manin obstructie voor de rationale punten van zulke symmetrische machten toe te passen. Deze stelling steunt op werk van één van de auteurs met Swinnerton-Dyer (1994) en met Skorobogatov en Swinnerton-Dyer (1998). Dat werk veralgemeent resultaten van Salberger (1988).

1. Introduction

Soient k un corps et $n > 0$ un entier. Un sous-ensemble D de $\mathbf{A}^n(k) = k^n$ est dit diophantien s'il existe une k -variété Z et un k -morphisme $f : Z \rightarrow \mathbf{A}_k^n$ tel que $D = f(Z(k))$. Dans cette définition, on peut supposer Z affine. On peut même supposer que Z est un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_k^{m+n} pour un certain m et que le morphisme f est induit par la projection $\mathbf{A}_k^{m+n} \rightarrow \mathbf{A}_k^n$. Une union finie de sous-ensembles diophantiens dans $\mathbf{A}^n(k)$ est un sous-ensemble diophantien. Nous montrons (Théorème 4.3) :

Pour tout corps de nombres k et tout entier $r > 1$, le complémentaire dans k^\times de l'ensemble $k^{\times r}$ des puissances r -ièmes est un ensemble diophantien.

Pour r une puissance de 2, c'est un théorème de B. Poonen [10]. Une démonstration "élémentaire" du cas $r = 2$ sur $k = \mathbb{Q}$ vient d'être donnée par J. Königsmann [9, Prop. 20 (b)].

Dans le cas $r = 2$, l'argument de Poonen utilise les surfaces de Châtelet d'équation affine

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

avec $a \in k^\times$ et $P(x)$ polynôme séparable produit de deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ de degré 2. Pour de telles surfaces, il est établi par Colliot-Thélène, Coray et Sansuc [3] que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour les points rationnels sur de telles surfaces. Ce résultat est généralisé dans [4] à tout polynôme $P(x)$ de degré 4.

Poonen [10] part d'un contre-exemple au principe de Hasse d'équation $y^2 - bz^2 = Q(x)R(x)$ (il en existe [11]), puis considère la famille \mathbb{U}_u à un paramètre $u \in k^\times$ de surfaces U_u d'équation $y^2 - buz^2 = Q(x)R(x)$.

Un point clé est que l'ensemble des $u \in k^\times$ sans obstruction de Brauer-Manin pour l'existence de points rationnels sur \mathbb{U}_u est un ensemble diophantien, car d'après [3], c'est l'image des points k -rationnels de \mathbb{U}_u par le k -morphisme $\mathbb{U}_u \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ donné par la coordonnée u .

Dans le cas $r = p$ avec p premier quelconque, on considère les variétés définies sur un corps de nombres k contenant une racine p -ième de 1 par une équation

$$\text{Norm}_{k((bu)^{1/p})/k}(\Xi) = P(x)$$

avec $b \in k^\times$ fixe, u variant dans k^\times , et $P(x)$ un polynôme séparable produit de deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ de degré p . Sous l'hypothèse de Bouniakowsky-Dickson-Schinzel, Colliot-Thélène et Swinnerton-Dyer [5] montrent que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour les points rationnels de telles variétés. C'est ce

qui a permis à A. Várilly-Alvarado et B. Viray [15] d'étendre, de façon conditionnelle, l'argument de Poonen à tout entier r .

L'article [5] établit aussi un résultat incondiionnel : pour des variétés du type ci-dessus, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 est la seule obstruction [5, Thm. 5.1]. C'est une généralisation d'un résultat de Salberger [13] sur les surfaces fibrées en coniques.

L'idée nouvelle du présent article est d'utiliser une version « effective » de ce résultat (Corollaire 3.2) : Il existe un entier N , premier à p , indépendant de u , avec la propriété suivante. Pour $u \in k^\times$, sur un modèle projectif et lisse convenable \mathbb{X}_u d'une variété ci-dessus, s'il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel, alors il existe un zéro-cycle effectif de degré N sur \mathbb{X}_u , ce qui se traduit par le fait que le produit symétrique $\text{Sym}^N \mathbb{X}_u$ possède un k -point. Cela permet de montrer que le complémentaire de l'ensemble des points $u \in k^\times$ pour lesquels $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$ et $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$ est un ensemble diophantien. Le reste de l'argument (Théorème 4.3) est alors comme dans [10].

Pour établir le résultat d'effectivité, nous reprenons les démonstrations de [5], dans la version plus souple développée dans [6] (Théorème 3.1 et Corollaire 3.2). La méthode donne $N = 2p + 1$. Comme nous l'a signalé O. Wittenberg au vu d'une précédente version de cet article, un résultat d'effectivité plus général a déjà été obtenu, par la même méthode, dans son article [17].

Si l'on admet un résultat algébrique annoncé par Salberger dans sa thèse [12], mais non publié, on peut se dispenser de revisiter les démonstrations des articles [5] ou [6], ou de citer [17]. Cette méthode alternative donne $N = (p - 1)^2$. Le résultat de Salberger [12] est décrit au §6, la variante de la démonstration du théorème principal étant exposée au §5.

Rappels et notations

On note $A[n]$ le sous-groupe de n -torsion d'un groupe abélien A .

Soient k un corps et n un entier. On appelle extension cyclique K de k de degré n une k -algèbre étale K et une action de $G = \mathbb{Z}/n$ sur K qui fait de $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } k$ un G -torseur. En particulier par extension cyclique de corps K/k , on entend dans ce texte une extension cyclique galoisienne de groupe $G = \mathbb{Z}/n$ muni du générateur $1 \in \mathbb{Z}/n$. Ceci définit une classe $\chi_{K/k} \in H^1(k, \mathbb{Z}/n)$. Si $n \neq 0 \in k$, à tout élément $c \in k^\times$ on associe sa classe dans $k^\times/k^{\times n} \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mu_n)$.

Pour K/k une extension cyclique de degré n premier à la caractéristique de k , et $c \in k^\times$, on dispose de l'algèbre simple centrale cyclique $(K/k, c)$ de

degré n , dont on note encore $(K/k, c)$ la classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}k$, qui est définie comme le cup-produit via

$$H^1(k, \mathbb{Z}/n) \times H^1(k, \mu_n) \rightarrow H^2(k, \mu_n)$$

de la classe $\chi_{K/k}$ et de la classe de c dans $k^\times/k^{\times n}$.

Supposons que k contient une racine primitive n -ième de 1, soit ζ . Le choix d'un isomorphisme $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$ permet d'identifier $H^1(k, \mathbb{Z}/n) = H^1(k, \mu_n) = k^\times/k^{\times n}$ et $(\mathrm{Br}k)[n] = H^2(k, \mu_n) = H^2(k, \mu_n^{\otimes 2})$. Étant donnés $b, c \in k^\times$, on note alors $(b, c)_\zeta \in (\mathrm{Br}k)[n]$ le cup-produit des classes b et c dans $k^\times/k^{\times n} = H^1(k, \mu_n)$. Compte tenu de l'identification $\mathbb{Z}/n = \mu_n$, la k -algèbre $k(b^{1/n}) := k[t]/(t^n - b)$ est munie naturellement d'une structure d'extension cyclique de degré n , et l'on a $(k(b^{1/n})/k, c) = (b, c)_\zeta \in \mathrm{Br}k$.

La lecture du présent article requiert une certaine familiarité avec les articles [5], [6], [10].

2. Algèbre

Le lemme suivant est bien connu (cf. [8, Chapitres 4 et 5]).

Lemme 2.1. — *Soit K/k une extension cyclique de corps de degré n premier à la caractéristique de k . Soit $c \in k^\times$.*

(i) *La k -variété affine Y d'équation $\mathrm{Norm}_{K/k}(\Xi) = c$ est un ouvert de la k -variété de Severi-Brauer X d'indice $n - 1$ attachée à l'algèbre simple centrale $(K/k, c)$.*

(ii) *La k -variété Y possède un k -point si et seulement si la classe de $(K/k, c)$ est nulle dans $\mathrm{Br}k$.*

(iii) *On a une suite exacte*

$$\mathbb{Z}/n \rightarrow \mathrm{Br}k \rightarrow \mathrm{Br}X \rightarrow 0,$$

où $1 \in \mathbb{Z}/n$ a pour image $(K/k, c) \in \mathrm{Br}k$.

Démonstration. — En utilisant [8], on établit ce lemme bien connu, à un point près. L'exercice [8, Ex. 1], où il convient de remplacer bx par bx^n , donne un énoncé d'équivalence birationnelle stable au lieu de (i) ci-dessus. Esquissons comment l'on obtient (i). On a les suites exactes de k -tores

$$1 \rightarrow R_{K/k}^1 \mathbb{G}_m \rightarrow R_{K/k} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{Norm}_{K/k}} \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{x \mapsto x^n} R_{K/k} \mathbb{G}_m \rightarrow R_{K/k} \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow 1.$$

Notons $T_1 = R_{K/k}^1 \mathbb{G}_m$ et $T = R_{K/k} \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_{m,k}$. Le choix d'un générateur de $\text{Gal}(K/k)$ définit un isomorphisme de k -tores $T_1 \xrightarrow{\sim} T$. La k -variété Y est un espace principal homogène sous le k -tore T_1 . C'est donc aussi un espace principal homogène sous le k -tore T . On a un plongement torique, de $R_{K/k} \mathbb{G}_m$ dans $W := R_{K/k} \mathbb{G}_a \setminus \{0\} \simeq \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$, qui induit un plongement torique de T dans le quotient de W par l'action diagonale de $\mathbb{G}_{m,k}$, quotient qui s'identifie à l'espace projectif \mathbb{P}_k^{n-1} . La k -variété Y est donc un ouvert dans la k -variété $X = Y \times^T \mathbb{P}_k^{n-1}$ quotient de $Y \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ par l'action diagonale de T . Cette k -variété X est une forme tordue de l'espace projectif. On a le diagramme commutatif de k -groupes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathbb{G}_{m,k} & \rightarrow & R_{K/k} \mathbb{G}_m & \rightarrow & T \rightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{G}_{m,k} & \rightarrow & GL_{n,k} & \rightarrow & PGL_{n,k} \rightarrow 1. \end{array}$$

Ce diagramme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, T) & \rightarrow & \text{Br} k \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ H^1(k, PGL_{n,k}) & \rightarrow & \text{Br} k. \end{array}$$

La flèche $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, PGL_{n,k})$ envoie la classe de Y sur la classe de X , et le composé $k^\times / N_{K/k} K^\times \xrightarrow{\sim} H^1(k, T_1) \xrightarrow{\sim} H^1(k, T) \rightarrow \text{Br} k$ envoie la classe de c sur la classe de l'algèbre cyclique $(K/k, c)$ (cf. [8, Cor. 4.7.4]). Quant à la flèche $H^1(k, PGL_{n,k}) \rightarrow \text{Br} k$, elle envoie la classe d'isomorphie d'une variété de Severi-Brauer d'indice $n - 1$ sur sa classe dans le groupe de Brauer. \square

Proposition 2.2. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient p un nombre premier et $P(x) \in k[x]$ un polynôme séparable de degré $2p$. Soit K/k une extension galoisienne cyclique, de groupe $G = \mathbb{Z}/p$. Soit U la k -variété définie par*

$$\text{Norm}_{K/k}(\Xi) = P(x) \neq 0.$$

(i) *Il existe une k -compactification lisse X de U , équipée d'un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ étendant l'application $(\Xi, x) \mapsto x$, dont la fibre générique $X_\eta/k(\mathbb{P}^1)$ est une variété de Severi-Brauer de dimension $p - 1$, d'algèbre simple centrale associée l'algèbre cyclique $(K/k, P(x))$, telle que pour M*

point fermé de \mathbf{P}_k^1 non zéro de $P(x)$, la fibre X_M est une variété de Severi-Brauer sur le corps résiduel $k(M)$.

(ii) Si K n'est pas un corps, alors la k -variété X est k -birationnelle à \mathbf{P}_k^p , et $\mathrm{Br}k = \mathrm{Br}X$.

(iii) Supposons que K est un corps, et que $P(x) = Q(x).R(x)$ avec $Q(x)$ et $R(x)$ irréductibles de degré p et sans zéro dans K . Alors les algèbres cycliques $(K/k, Q(x))$ et $(K/k, R(x))$ dans $\mathrm{Br}k(x)$ ont une image dans $\mathrm{Br}k(X)$ qui appartient à $\mathrm{Br}X$, et le quotient de $\mathrm{Br}X$ par l'image de $\mathrm{Br}k$ est un groupe cyclique d'ordre p engendré par l'image de $(K/k, Q(x))$.

Démonstration. — ⁽¹⁾ On considère la k -variété d'équation

$$\mathrm{Norm}_{K/k}(\Xi) = P(x)$$

et $U_1 \subset U$ l'ouvert maximal sur lequel la projection $U_1 \rightarrow \mathbf{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[x]$ définie par x est lisse.

Soit V la k -variété V d'équation

$$\mathrm{Norm}_{K/k}(\Theta) = P'(y)$$

avec $P'(y) := y^{2p}P(1/y)$. Soit $V_1 \subset V$ l'ouvert maximal sur lequel le morphisme $V_1 \rightarrow \mathbf{A}_k^1 = \mathrm{Spec} k[y]$ défini par y est lisse.

On recolle la k -variété U_1 et la k -variété V_1 en une k -variété W via $x = 1/y$ et $y^2.\Xi = \Theta$. On dispose donc d'un k -morphisme $W \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ à fibres lisses, dont toutes les fibres sauf celles au-dessus des points fermés à support dans $P(x) = 0$ sont géométriquement intègres.

Une variante du lemme 2.1 permet alors de construire une k -variété W' lisse équipée d'un morphisme $W' \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ dont les fibres au-dessus des points fermés autres que ceux supportés dans $P(x) = 0$ sont des variétés de Severi-Brauer, et dont les fibres en les points fermés supportés dans $P(x) = 0$ sont les fibres de $W \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. En utilisant le théorème d'Hironaka, on obtient alors l'existence d'une k -variété projective X munie d'un k -morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$, contenant W' comme ouvert, le morphisme π étendant $W' \rightarrow \mathbf{P}_k^1$.

L'énoncé (ii) est évident : si K n'est pas un corps, alors $\mathrm{Norm}_{K/k}(\Xi)$ s'écrit comme un produit de variables indépendantes, et la k -variété définie par l'équation

$$Y_1 \dots Y_p = P(x) \neq 0$$

est clairement k -rationnelle.

1. La proposition [15, Prop. 2.1] est incorrecte ; nous ne pouvons donc citer [15, §3].

L'énoncé (iii) est essentiellement démontré dans [5, §2.2, Thm. 2.2.1]. Nous donnons les points principaux de la démonstration, renvoyant le lecteur à [5, §1 et §2] pour des explications plus détaillées.

On fixe un générateur σ de $\text{Gal}(K/k)$, et on note $(K/k, c) = (K/k, \sigma, c)$.

On a la suite exacte (Lemme 2.1)

$$\mathbb{Z}/p \cdot (\alpha) \rightarrow \text{Br}k(\mathbf{P}^1) \xrightarrow{\pi^*} \text{Br}X_\eta \rightarrow 0,$$

où $\alpha = (K(x)/k(x), P(x))$, qu'on note $(K/k, P(x))$. Soit $\gamma \in \text{Br}X \subset \text{Br}X_\eta$. Il existe donc $\beta \in \text{Br}k(\mathbf{P}^1)$ tel que $\gamma = \pi^*(\beta)$.

Les fibres de π aux points fermés de $\mathbf{A}_k^1 = \text{Spec } k[x]$ autres que ceux définis par $Q = 0$ et $R = 0$ sont lisses et géométriquement intègres. La comparaison des résidus de γ et de β entraîne que les résidus de β en tout point fermé de \mathbf{A}_k^1 autre que $Q = 0$ et $R = 0$ sont nuls. La comparaison des résidus de γ et de β au-dessus de $Q = 0$, resp. de $R = 0$, sur l'ouvert $U_1 \subset X$, montre aussi que $\text{Res}_Q(\beta) \in H^1(k_Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, resp. $\text{Res}_R(\beta) \in H^1(k_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où k_Q , resp. k_R , désigne le corps résiduel en $Q = 0$, resp. en $R = 0$, s'annulent par passage à $K \otimes_k k_Q$, resp. $K \otimes_k k_R$. Les groupes $H^1(K \otimes_k k_Q/k_Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p$, et $H^1(K \otimes_k k_R/k_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p$ sont engendrés par l'image d'un générateur χ de $H^1(K/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p$. La k -algèbre $(K/k, Q(x))$ a sur \mathbf{A}_k^1 pour seul résidu χ_{k_Q} en $Q = 0$. La k -algèbre $(K/k, R(x))$ a sur \mathbf{A}_k^1 pour seul résidu χ_{k_R} en $R = 0$. On voit donc qu'il existe des entiers r et s tels que $\beta - (K/k, Q(x)^r) - (K/k, R(x)^s)$ ait tous ses résidus triviaux sur \mathbf{A}_k^1 , donc par la suite exacte de Faddeev (cf. [5, §1.2]) soit dans l'image de $\text{Br}k$. Comme la classe $\alpha = (K/k, P(x)) \in \text{Br}k(\mathbf{P}^1)$ a une image nulle dans $\text{Br}k(X)$, on voit que $\gamma \in \text{Br}X \subset \text{Br}k(X)$ est la somme d'un multiple de $\pi^*(K/k, Q(x))$ et d'une classe dans $\text{Br}k$. Nous renvoyons à [5, Thm. 2.2.1] pour la démonstration du fait que $\pi^*(K/k, Q(x))$ appartient à $\text{Br}X$, démonstration qui utilise le fait que le degré de Q est p . Si la classe $\pi^*(K/k, Q(x)) \in \text{Br}k(X)$ appartenait à l'image de $\text{Br}k$, d'après le lemme 2.1 il existerait un entier r tel que

$$(K/k, Q(x)) - r(K/k, P(x)) = (K/k, Q(x)) - r(K/k, Q(x)R(x)) \in \text{Br}k(x)$$

appartienne à $\text{Br}k$. Le calcul du résidu d'un tel élément au point fermé $R(x) = 0$ donne $r = 0$. Et le résidu de $(K/k, Q(x))$ en $Q(x) = 0$ n'est pas nul. Ainsi $\text{Br}X/\text{Br}k$ est d'ordre p , engendré par la classe $\pi^*(K/k, Q(x))$. Le calcul de résidu a utilisé le fait que ni Q ni R n'ont de zéro dans K . \square

3. Arithmétique

Soient k un corps de nombres et Ω l'ensemble de ses places. Pour $v \in \Omega$, on note k_v le complété de k en v et pour v non archimédienne, \mathbb{F}_v le corps résiduel en v .

Comme mentionné dans l'introduction, le théorème suivant, avec précisément la même borne $d \geq d_0$, est un cas particulier d'un résultat de Wittenberg [17, Thm. 4.8], résultat qui est une conséquence de [6, Thm. 4.1]. Comme nous partons ici d'une hypothèse sur les points rationnels et non sur les zéro-cycles, la démonstration que nous proposons est un peu plus simple que celle de [17, Thm. 4.8]. Comme elle est courte, nous l'avons conservée.

Théorème 3.1. — *Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k , équipée d'un morphisme projectif et plat $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ à fibre générique géométriquement intègre. Soit d_0 la somme des degrés sur k des points fermés de \mathbf{P}_k^1 dont la fibre n'est pas lisse.*

Supposons :

(i) *Pour tout point fermé $M \in \mathbf{P}_k^1$, de corps résiduel $k(M)$, la fibre $X_M/k(M)$ contient une composante irréductible $Z \subset X_M$, de multiplicité 1, telle que la fermeture algébrique de $k(M)$ dans le corps des fonctions de Z est une extension abélienne de $k(M)$.*

(ii) *Il existe un adèle dans $X(\mathbf{A}_k)$ orthogonal au groupe de Brauer vertical de X , c'est-à-dire au sous-groupe de $\mathrm{Br}X$ dont l'image dans $\mathrm{Br}k(X)$ appartient à $\pi^*\mathrm{Br}k(\mathbf{P}^1)$.*

(iii) *Le principe de Hasse vaut pour les fibres lisses de π au-dessus de tout point fermé de \mathbf{P}_k^1 .*

Alors, pour tout entier $d \geq d_0$, et tout ouvert de Zariski non vide $V \subset \mathbf{P}_k^1$, il existe un point fermé $m \in V$ de degré d sur k , à fibre X_m lisse contenant un $k(m)$ -point rationnel.

Démonstration. — On peut supposer que la fibre de π au-dessus du point à l'infini de \mathbf{P}_k^1 est lisse. Soit $V \subset \mathbf{A}_k^1$ le complémentaire de l'ensemble des points fermés M dont la fibre $X_M/k(M)$ n'est pas lisse. Soit $U = \pi^{-1}(V)$. La projection $\pi : U \rightarrow V$ est donc lisse. Il suffit de modifier la démonstration de [6, Thm. 4.1]. Nous supposons que le lecteur a le texte [6] sous la main.

À la page 19 de [6], au lieu d'appliquer [5, Thm. 3.2.2] aux zéro-cycles, on applique [5, Thm. 3.2.1] aux points rationnels, c'est-à-dire le lemme formel d'Harari, comme c'est fait dans [6, (1.4)]. C'est-à-dire que l'on commence

comme dans la démonstration de [6, Thm. 1.1], plus précisément comme au premier paragraphe de [6, p. 7].

Ceci donne des égalités

$$\sum_{v \in S_1} A_{i,j}(p_v) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

avec des $p_v \in U(k_v)$ et S_1 un ensemble fini de places contenant l'ensemble S des places "de mauvaise réduction".

En utilisant le théorème des fonctions implicites, pour chaque place v on peut trouver des $p_{v,l} \in U(k_v)$, $l = 1, \dots, d$, d'images respectives $m_{v,l} = \pi(p_{v,l})$, tous distincts dans $V(k_v)$, tels que $A_{i,j}(p_{v,l}) = A_{i,j}(p_v) \in \text{Br}k_v$ pour tout l .

On reprend alors la démonstration de [6, Thm. 4.1], page 19, à la formule (4.3), en définissant pour chaque $v \in S_1$ le zéro-cycle z_v^2 sur U

$$z_v^2 = \sum_{i=1}^d p_{v,i}.$$

On continue alors la démonstration, avec des polynômes $G_v(t)$ unitaires de diviseur $\pi(z_v^2)$ sur $\mathbf{A}_{k_v}^1$. Ces polynômes sont de degré d (au lieu de $1 + Dds$ avec les notations de [6]). Procédant comme au troisième paragraphe de la page 20 de [6], en utilisant l'astuce de Salberger, comme détaillée au §3 de [6], on trouve un polynôme irréductible $G(t) \in k[t]$, de degré d , définissant un point fermé $m \in V$ dont la fibre $X_m/k(m)$ a des points dans tous les complétés de $k(m)$, donc a un $k(m)$ -point rationnel. \square

Soit k un corps parfait, \bar{k} une clôture séparable de k . Pour $N > 0$ entier, et toute k -variété quasi-projective U , on note $\text{Sym}^N U$ le quotient de l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_N sur le produit U^N . On a une bijection entre les ensembles suivants :

- (i) Les k -points de $\text{Sym}^N U$.
- (ii) Les zéro-cycles effectifs de degré N sur U .
- (iii) Les zéro-cycles effectifs de degré N sur $U \times_k \bar{k}$ qui sont invariants sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

La bijection entre (ii) et (iii) est claire. Pour tout k -point de $\text{Sym}^N U$ on choisit un point $(P_1, \dots, P_N) \in U^N(\bar{k})$. Le zéro-cycle $P_1 + \dots + P_N$ est invariant sous $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Inversement si $P_1 + \dots + P_N$ est un zéro-cycle effectif de degré N sur $U \times_k \bar{k}$ invariant sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, alors l'image de $(P_1, \dots, P_N) \in U^N(\bar{k})$ dans $(\text{Sym}^N U)(\bar{k})$ est invariante sous $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, donc définit un k -point de $\text{Sym}^N U$.

Corollaire 3.2. — Soit k un corps de nombres. Soit K/k une extension finie cyclique de corps, de degré p . Soit $P(x) = Q(x)R(x)$ un polynôme séparable de degré $2p$ produit de deux polynômes irréductibles de degré p . Soit $U = U(K/k, P)$ la k -variété affine, lisse, intègre définie par l'équation

$$\text{Norm}_{K/k}(\Xi) = P(x) \neq 0.$$

Soit X une k -variété projective et lisse, géométriquement intègre, contenant U comme ouvert dense. S'il existe un élément $\{M_v\}$ du produit $\prod_{v \in \Omega} U(k_v)$ orthogonal à $(K/k, Q(x)) \in \text{Br}X$, alors il existe une extension de corps L/k de degré $2p + 1$ avec $U(L) \neq \emptyset$. En particulier les k -variétés $\text{Sym}^{2p+1}U$ et $\text{Sym}^{2p+1}X$ possèdent un k -point.

Démonstration. — D'après la proposition 2.2, il existe un tel modèle X . Les propriétés d'invariance birationnelle du groupe de Brauer montrent que l'énoncé ne dépend pas du choix du modèle. D'après la proposition 2.2, les classes $(K/k, Q(x))_{k(X)}$ et $(K/k, R(x))_{k(X)}$ sont chacune dans $\text{Br}X$, leur somme dans $\text{Br}k(X)$ est dans l'image de $\text{Br}k$, et ce sont des générateurs de $\text{Br}X$. Les hypothèses du théorème 3.1 sont clairement satisfaites, avec $d_0 = 2p$. On choisit ici $d = 2p + 1$. \square

Remarque 3.3. — Dans le cadre du corollaire, les seuls $A_{i,j}$ intervenant dans la preuve du théorème 3.1 sont $(K/k, Q(x))_{k(X)}$ et $(K/k, R(x))_{k(X)}$, et ces éléments de $\text{Br}k(X)$ sont ici dans $\text{Br}X$. On n'a donc pas besoin ici d'invoquer le lemme formel d'Harari, l'hypothèse donne les égalités

$$\sum_{v \in S_1} A_{i,j}(M_v) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

avec M_v comme dans l'énoncé du corollaire, et avec S_1 égal à l'ensemble fini S évident des places de mauvaise réduction.

Si l'on se limite à p premier impair, ce qui suffirait ici, on peut aussi éviter les difficultés spécifiques aux places réelles (voir à ce sujet [5, p. 82, l. 6/8] et [6, p. 17, l. 9/11]).

Proposition 3.4. — Soient p un nombre premier et k un corps de nombres contenant une racine primitive p -ième de l'unité ζ . Il existe $d \in k^\times$, $d \notin k^{\times p}$ et un polynôme séparable $P(x) = Q(x)R(x) \in k[x]$ avec $Q(x)$ et $R(x)$ irréductibles de degré p , sans zéro dans $K = k(d^{1/p})$, tels que toute k -variété X projective, lisse, géométriquement connexe k -birationnelle à la k -variété $U = U(K/k, P)$ d'équation affine

$$\text{Norm}_{K/k}(\Xi) = P(x) \neq 0$$

satisfasse :

- (i) X possède des points rationnels dans tous les complétés k_v de k .
- (ii) X ne possède pas de zéro-cycle de degré 1. Plus précisément, l'algèbre $A = (K/k, Q(x)) = (d, Q(x))_\zeta \in \text{Br}k(X)$ appartient à $\text{Br}X$ et, pour toute famille $\{z_v\}$, $v \in \Omega$, de zéro-cycles de degré 1 sur X , on a

$$\sum_{v \in \Omega} A(z_v) \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

- (iii) On a $(\text{Sym}^{2p+1}U)(k) = \emptyset$ et $(\text{Sym}^{2p+1}X)(k) = \emptyset$.

Démonstration. — Si une k -variété X satisfait (i) et (ii), toute autre k -variété projective, lisse, géométriquement connexe k -birationnelle à X satisfait (i) et (ii).

L'énoncé (iii) est une conséquence immédiate de l'énoncé (ii). En effet U possède de façon évidente un point dans une extension de degré p .

Poonen [11, §5, Prop. 5.1] (cas $p = 2$) puis de façon semblable Várilly-Alvarado et Viray [15, Prop. 4.1] (cas p impair) construisent (au moins birationnellement) une telle variété X avec des points rationnels dans tous les k_v mais telle qu'il y ait obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel. Nous allons montrer que leur exemple satisfait aussi l'énoncé analogue pour les zéro-cycles de degré 1, à savoir l'énoncé (ii) de la proposition. Ceci ne résulte pas formellement du cas des points rationnels (cf. [5, §10]).

Soit $M \in \mathbb{N}$ un entier tel que toute courbe plane projective lisse (et donc géométriquement intègre) de degré p sur un corps fini \mathbb{F} de cardinal au moins M possède au moins $2p + 1$ points \mathbb{F} -rationnels.

En utilisant le théorème de densité de Chebotarev et la théorie du corps de classes, on trouve $a, b, c \in k$ avec les propriétés suivantes :

- (1) $b \in O_k$, bO_k idéal premier, $b \equiv 1 \pmod{(1 - \zeta)^{2p-1}O_k}$, $b \gg 0$ et $\#\mathbb{F}_b > M$,
- (2) $a \in O_k$, aO_k idéal premier distinct de bO_k , $a \equiv 1 \pmod{(1 - \zeta)^{2p-1}O_k}$, $a \notin k_b^{\times p}$, $a \gg 0$ et $\#\mathbb{F}_a > M$.
- (3) $c \in O_k$, $b \mid ac + 1$.

Soient $d = ab$ et K le corps $k(d^{1/p})$. Soient $Q(x) = x^p + c$ et $R(x) = ax^p + ac + 1$.

Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement connexe et k -birationnelle à la k -variété U d'équation

$$\text{Norm}_{K/k}(\Xi) = Q(x)R(x) \neq 0.$$

Suivant [11, Lemma 5.3], montrons que l'on a $U(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v .

Comme on a $d \gg 0$, on a $U(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place archimédienne.

Soit v une place finie de k différente de $v = v_a, v = v_b$ et telle que $v(p) = 0$. L'extension $k(d^{1/p})/k$ est non ramifiée en v . Pour tout $x \in k_v$ avec $v(x) < 0$, on a $v(P(x)) = 2p$, on a donc des points dans $U(k_v)$ avec un tel x .

Soit v une place avec $v(p) > 0$. L'entier d satisfait $d = ab \equiv 1 \pmod{(1 - \zeta)^{2p-1} O_k}$. Soit $h(x) = x^p - d$. Les éléments p et $(1 - \zeta)^{p-1}$ diffèrent par une unité dans $\mathbb{Q}(\zeta)$. On en déduit $v(h(1)) > 2v(h'(1))$, où $h'(x) = px^{p-1}$ est le polynôme dérivé de $h(x)$. Le lemme de Hensel assure alors l'existence d'une solution (entière et congrue à 1 modulo v) de $x^p - d = 0$ dans k_v . On a donc $U(k_v) \neq \emptyset$.

Soit $v = v_b$. Alors a et c sont des unités dans k_v . Les hypothèses assurent que la courbe affine lisse $z^p = a(x^p + c) \neq 0$ sur le corps \mathbb{F}_v possède un point \mathbb{F}_v -rationnel. Il en est donc de même de la courbe $z^p = (x^p + c)(ax^p + ac + 1) \neq 0$ puisque $v_b(ac + 1) > 0$. Par le lemme de Hensel, un tel point se relève en un point de $z^p = (x^p + c)(a(x^p + c) + 1) \neq 0$ dans k_v . Ainsi $U(k_v) \neq \emptyset$.

Soit $v = v_a$. Sur le corps \mathbb{F}_v , on trouve une solution de $z^p = x^p + c \neq 0$, donc une solution de $z^p = (x^p + c)(a(x^p + c) + 1) \neq 0$. Une telle solution se relève en une solution de $z^p = (x^p + c)(a(x^p + c) + 1) \neq 0$ dans k_v . On a donc $U(k_v) \neq \emptyset$.

D'après la proposition 2.2, l'algèbre cyclique $A = (K/k, Q(x)) = (d, Q(x))_\zeta$ appartient à $\text{Br}(X)$.

Soit v une place de k et soit L/k_v une extension finie de corps, et w la valuation sur L . L'application $ev_A : X(L) \rightarrow \text{Br}L \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ obtenue par évaluation de A est continue. Par le théorème des fonctions implicites, son image est la même que l'image de l'évaluation de A sur $U(L)$:

$$ev_A : U(L) \rightarrow \text{Br}L \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad P \mapsto A(P)$$

Si d est une puissance p -ième dans L , l'image de ev_A est clairement nulle. C'est le cas pour v place complexe et aussi pour v une place réelle, puisque l'on a $a \gg 0$ et $b \gg 0$, et donc $d \gg 0$. C'est aussi le cas si $v(p) > 0$.

Soit v une place non archimédienne de k distincte de v_a et de v_b , avec $v(p) = 0$. Si d est une puissance p -ième dans L , l'image de ev_A est nulle. Supposons que d ne soit pas une puissance p -ième dans L . L'extension de corps locaux KL/L est non ramifiée, les normes sont exactement les éléments de valuation divisible par p . Soit $(\Xi, x) \in U(L)$. De l'équation de U on déduit $w(Q(x)) + w(R(x)) \equiv 0 \pmod{p}$. Si $w(x) < 0$, alors $w(Q(x)) = w(x^p + c) =$

$pw(x) \equiv 0 \pmod p$. Supposons $w(x) \geq 0$. On a $(ax^p + ac + 1) - a(x^p + c) = 1$. On a donc soit $0 = w(ax^p + ac + 1)$ soit $0 = w(a) + w(x^p + c) = w(x^p + c)$. Donc $w(Q(x)) = 0$ ou $w(R(x)) = 0$. Comme on a $w(Q(x)) + w(R(x)) \equiv 0 \pmod p$, on en déduit $w(Q(x)) \equiv 0 \pmod p$. Dans tous les cas, on a donc $w(Q(x)) \equiv 0 \pmod p$, et ceci implique $(d, Q(x))_\zeta = 0$. On voit donc que pour toute place v non archimédienne de k distincte de v_a et de v_b , et toute extension finie L/k_v , l'application $ev_A : U(L) \rightarrow \text{Br} L \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ a son image nulle.

Soit $v = v_a$. Si $w(x) < 0$ alors $Q(x) = x^p + c$ est une puissance p -ième dans L , et donc $(d, Q(x))_\zeta = 0$. Supposons $w(x) \geq 0$. Alors $ax^p + ac + 1 \equiv 1 \pmod a$, ce qui implique que $R(x) = ax^p + ac + 1$ est une puissance p -ième dans L , et donc $(d, Q(x))_\zeta = (d, R(x))_\zeta = 0$.

On voit donc que pour toute place $v \neq v_b$ et tout zéro-cycle z_v sur X_{k_v} , on a $A(z_v) = 0$.

Soit enfin $v = v_b$. L'équation de U donne

$$(d, Q(x))_\zeta + (d, R(x))_\zeta = 0 \in \mathbb{Z}/p \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \text{Br} L.$$

Supposons $w(x) \neq 0$. On a $w(ac + 1) > 0$. Ainsi $R(x) = ax^p + ac + 1$ est le produit de a et d'une puissance p -ième dans L . Donc $(d, R(x))_\zeta = (ab, a)_\zeta$, et donc $(d, Q(x))_\zeta = -(ab, a)_\zeta \in \mathbb{Z}/p$. Supposons $w(x) > 0$. De $w(ac + 1) > 0$ on déduit que c est une unité dans L et que $-ac$ est une puissance p -ième dans L . Alors $Q(x) = x^p + c$ est le produit de $-a^{-1}$ et d'une puissance p -ième dans L , donc $(d, Q(x))_\zeta = (ab, -a^{-1})_\zeta = -(ab, -a)_\zeta$. Si p est impair, -1 est une puissance p -ième, donc $-(ab, a)_\zeta = -(ab, -a)_\zeta$. Si $p = 2$, on a encore cette égalité, car $(ab, -1)_{v_b} = 0$ [11, Lemma 5.2]. Ceci est établi en utilisant $(a, -1)_{v_b} = 0$ (facile) et $(b, -1)_{v_b} = 0$ (obtenu via la formule du produit). En conclusion, pour $v = v_b$, toute extension finie L de k_{v_b} et tout point $P \in U(L)$, on a $A(P) = -(ab, -a)_\zeta = (b^{-1}, -a)_\zeta = (b^{-1}, a)_\zeta \in \text{Br} L$.

Pour toute extension finie E/F de corps, le composé $\text{Br} F \rightarrow \text{Br} E \rightarrow \text{Br} F$ de la restriction et de la corestriction est la multiplication par le degré $[E : F]$. Pour $v = v_b$ et $z_{v_b} = \sum_i n_i P_i$ un zéro-cycle sur X_{k_v} , la valeur prise par A sur ce zéro-cycle est donc

$$\sum n_i [k(P_i) : k] (b^{-1}, a)_\zeta \in \text{Br} k_v,$$

soit encore $\deg(z_{v_b}) (b^{-1}, a)_\zeta \in \text{Br} k_{v_b}$. Si le zéro-cycle z_{v_b} est de degré 1, la valeur prise est $[(b^{-1}, a)_\zeta]_{v_b} \in \text{Br} k_{v_b} \subset \mathbb{Z}/p$, et cette classe est non nulle, car l'unité a n'est pas une puissance p -ième dans le corps résiduel de k_{v_b} .

On voit donc que pour toute famille $\{z_v\}$, $v \in \Omega$, de zéro-cycles de degré 1 sur X , on a

$$\sum_{v \in \Omega} A(z_v) = [(b^{-1}, a)_\zeta]_{v_b} \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

4. Le théorème

Soient p un nombre premier et k un corps de nombres contenant une racine primitive p -ième ζ de 1, qu'on fixe, déterminant ainsi un isomorphisme $\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\sim} \mu_p$ sur k . Soient $a, b, c, d \in k$ et $Q(x), R(x), P(x) = Q(x)R(x)$ comme dans la proposition 3.4 et sa démonstration.

Soient $A = k[u, 1/u]$ et $B = k[u, 1/u][v]/(v^p - du)$, avec le plongement évident $A \hookrightarrow B$, qui fait de $\text{Spec } B$ un A -schéma fini étale, plus précisément un \mathbb{Z}/p -torseur.

Soit \mathbb{U} le R -schéma lisse défini par

$$\text{Norm}_{B/A}(\Xi) = P(x) \neq 0,$$

où $\Xi = \sum_{i=0}^{p-1} v^i x_i$. L'espace total \mathbb{U} est affine, car donné par le système

$$\text{Norm}_{B/A}(\Xi) = P(x), \quad P(x)y - 1 = 0.$$

La fibre de \mathbb{U}/R en un point $u \in \text{Spec } R$ est notée \mathbb{U}_u . Pour u un k -point, $\mathbb{U}_u = U(k((du)^{1/p})/k, P(x))$.

En utilisant le théorème d'Hironaka, on construit un A -schéma intègre \mathbb{X} , projectif et lisse sur A , contenant le A -schéma \mathbb{U} comme ouvert, tel que pour tout k -homomorphisme $A \rightarrow k$, i.e. pour tout choix de $u \in k^\times$, le A -schéma \mathbb{X} se spécialise en une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre $\mathbb{X}_u = X_{k((du)^{1/p})/k}$ contenant $U(k((du)^{1/p})/k, P(x))$ comme ouvert dense.

Lemme 4.1. — *Soit C la k -courbe lisse définie par l'équation*

$$z^p = Q(x)R(x) \neq 0.$$

Il existe un ensemble fini S de places de k , contenant les places archimédiennes, tel que, pour toute place $v \notin S$,

(i) *On a $C(k_v) \neq \emptyset$.*

(ii) *Pour tout $u \in k_v^\times$ de valuation v -adique $v(u)$ non nulle modulo p , l'algèbre $(u, Q(x))_\zeta$, quand évaluée sur $C(k_v)$, prend toutes les valeurs dans $\mathbb{Z}/p \subset \text{Br } k_v$.*

Démonstration. — Soit v une place finie telle que $Q(x)R(x)$ ait ses coefficients dans l'anneau O_v des entiers de k_v , son coefficient dominant une unité dans O_v , et que p soit inversible dans O_v . Soit \mathbb{F}_v le corps résiduel en v . La \mathbb{F}_v -courbe C_γ définie par

$$z_1^p = \gamma Q(x) \neq 0, \quad z_2^p = \gamma^{-1} R(x) \neq 0,$$

est lisse et géométriquement intègre. Son modèle projectif évident dans \mathbf{P}^3 est une courbe intersection complète lisse D_γ de deux surfaces de degré p , le genre de D_γ est donc $p^3 - 2p^2 + 1$. Sur une clôture algébrique du corps de base, on vérifie immédiatement que le complémentaire de C_γ dans D_γ est formé de $3p^2$ points.

Si le cardinal de \mathbb{F}_v est plus grand qu'une constante dépendant seulement de l'entier p , par les estimations de Weil pour les courbes, pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_v^\times$, la \mathbb{F}_v -courbe C_γ contient un \mathbb{F}_v -point. En associant au point de coordonnées (x, z_1, z_2) le point de coordonnées $(x, z = z_1 \cdot z_2)$ on définit un morphisme de C_γ dans la courbe lisse d'équation $z^p = Q(x)R(x) \neq 0$ sur \mathbb{F}_v . Par le lemme de Hensel, l'image d'un \mathbb{F}_v -point de C_γ dans cette courbe lisse est un \mathbb{F}_v -point qui se relève en un O_v -point de la courbe C . Sur un tel O_v -point, l'algèbre $(u, Q(x))_\zeta$ a pour valeur $\gamma^{v(u)} \in \mathbb{F}_v^\times / \mathbb{F}_v^{\times p} \simeq \mathbb{Z}/p$. Comme $\gamma \in \mathbb{F}_v^\times$ est arbitraire, ceci établit le lemme. \square

L'énoncé suivant est la généralisation du théorème 1.3 de [10] (cas $p = 2$). C'est le Théorème 5.2 de [15].

Proposition 4.2. — *L'ensemble des $u \in k^\times$ tels que l'on ait à la fois $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$ et $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$ forme un nombre fini de classes dans $k^\times / k^{\times p}$.*

Démonstration. — Il est clair que chacune des deux propriétés considérées ne dépend que de la classe de u dans $k^\times / k^{\times p}$. Soient C et S comme dans le lemme 4.1. On suppose de plus que S contient les places finies avec $v(d) \neq 0$, c'est-à-dire v_a et v_b . Pour tout $u \in k^\times$, la courbe C est contenue dans \mathbb{X}_u . Soit u tel que $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$. S'il existe une place $v \notin S$ telle que $v(u) = v(du) \in \mathbb{Z}$ ne soit pas divisible par p , alors, d'après le lemme 4.1, l'algèbre $(du, Q(x))_\zeta$ parcourt sur $C(k_v) \subset \mathbb{X}_u(k_v)$ toutes les valeurs dans $\mathbb{Z}/p \subset \text{Br}k_v$. D'après la proposition 2.2, la classe de $(du, Q(x))_\zeta$ appartient à $\text{Br}\mathbb{X}_u$ et engendre $\text{Br}\mathbb{X}_u / \text{Br}k$. Il ne saurait donc y avoir obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un k -point, et encore moins d'un zéro-cycle de degré 1 sur \mathbb{X}_u . On voit donc que les $u \in k^\times$ tels que $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$ et qu'on ait obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 ont leur image dans le

noyau de l'application

$$\text{div} : k^\times / k^{\times p} \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} \mathbb{Z}/p$$

et ce noyau est fini (finitude du nombre de classes et théorème des unités de Dirichlet). \square

Nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème principal.

Théorème 4.3. — *Soit k un corps de nombres. Soit $r > 0$ un entier. Le complément de $k^{\times r}$ dans k^\times est un ensemble diophantien : il existe une k -variété Z et un k -morphisme $f : Z \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ tel que $f(Z(k))$ soit le complémentaire des puissances r -ièmes dans k .*

Démonstration. — Une réduction connue [10, Cor. 1.2], [15, Lemma 5.3 & Proof of Cor. 1.2, p. 133] montre qu'il suffit d'établir le résultat lorsque r est un nombre premier p , et que de plus k contient les racines primitives p -ièmes de l'unité. On fixe une telle racine primitive p -ième ζ dans k .

Notons $H_v = k^\times \cap k_v^{\times p}$ et N_v le complémentaire de H_v dans k^\times . Ce sont des ensembles diophantiens (cf. [10, Thm 1.5]) stables par multiplication par $k^{\times p}$.

Soit D_1 l'ensemble des $u \in k^\times$ tels que $\text{Sym}^{2p+1} \mathbb{U}_u(k) \neq \emptyset$. C'est un ensemble stable par multiplication par $k^{\times p}$. C'est un ensemble diophantien, car c'est l'image des points k -rationnels de la k -variété $\text{Sym}_A^{2p+1} \mathbb{U}$ par la projection naturelle $\text{Sym}_A^{2p+1} \mathbb{U} \rightarrow \text{Spec } A = \mathbb{G}_{m,k} \subset \mathbb{A}_k^1$. On a noté ici $\text{Sym}_A^{2p+1} \mathbb{U}$ le quotient du produit fibré de N exemplaires de \mathbb{U} au-dessus de $\text{Spec } A$ par l'action de \mathfrak{S}_N .

Soit D_2 la réunion de D_1 et des N_v pour $v \in S$, avec S comme au lemme 4.1. C'est un ensemble diophantien dans $k^\times \subset k$, stable par multiplication par $k^{\times p}$.

Considérons le complément E de D_2 dans k^\times . C'est un ensemble stable par multiplication par $k^{\times p}$. Pour tout $u \in E$, on a $\mathbb{X}_u(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. D'après le corollaire 3.2, l'ensemble E est contenu dans l'ensemble C des $u \in k^\times$ tels que de plus $\mathbb{X}_u(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$. D'après la proposition 4.2, l'ensemble C est union d'un nombre fini d'orbites de $k^{\times p}$ dans k^\times . Il en est donc de même de E . D'après la proposition 3.4, l'orbite de 1, soit $k^{\times p}$, n'est pas dans D_2 , et elle est dans E .

Le complément D_3 de $k^{\times p}$ dans E est une union finie d'orbites de $k^{\times p}$ dans k^\times , chacune clairement un ensemble diophantien, donc D_3 est un ensemble diophantien. La réunion de D_2 et de D_3 est un ensemble diophantien D_4 dont

le complément dans k^\times est précisément $k^{\times p}$. Ainsi le complément de $k^{\times p}$ dans k^\times est l'ensemble diophantien D_4 , ce qui établit le théorème 4.3. \square

Remarque 4.4. — Dans la démonstration, on peut remplacer l'ensemble diophantien D_1 par l'ensemble diophantien D'_1 formé des $u \in k^\times$ tels que $\text{Sym}^{2p+1}\mathbb{X}_u(k) \neq \emptyset$. L'ensemble D'_1 est stable par multiplication par $k^{\times p}$. Il contient D_1 . On définit D'_2 comme la réunion de D'_1 et des N_v pour $v \in S$, puis $E' \subset E \subset C$ comme le complément de D'_2 dans k^\times .

5. Une variante de la démonstration

Dans la démonstration du théorème 4.3, un ingrédient clé est le corollaire 3.2 du théorème 3.1.

En combinant un résultat non publié de Salberger (1985), décrit dans l'appendice (paragraphe 6 ci-après), on peut utiliser directement les théorèmes principaux de [5] ou [6] sur les zéro-cycles pour donner une variante de la démonstration du théorème 4.3, variante qui évite le corollaire 3.2 du théorème 3.1, et donc aussi ce dernier théorème.

Le corollaire 3.2 du théorème 3.1 établit le résultat suivant :

Soit $u \in k^\times$. Si l'on a $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$, alors $\text{Sym}^{2p+1}\mathbb{X}_u(k) \neq \emptyset$.

Voici comment établir directement un substitut de ce résultat. D'après [5, Thm. 5.1] ou [6, Thm. 4.1], l'hypothèse $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ implique l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur la k -variété \mathbb{X}_u . Le théorème 6.5 ci-dessous, avec $s = 2p$, donne alors l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $(p-1)^2$ sur \mathbb{X}_u . Ainsi $\mathbb{X}_u(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ implique que $u \in k^\times$ est dans l'image des points k -rationnels de $\text{Sym}_A^N \mathbb{X}$ via la projection $\text{Sym}_A^{p^2-2p+1} \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{G}_m$. On procède alors exactement comme dans la démonstration du théorème 4.3, en y remplaçant la projection $\text{Sym}_A^{p+1} \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{G}_m$ par $\text{Sym}_A^{p^2-2p+1} \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{G}_m$.

6. Appendice : Résultats d'effectivité pour les zéro-cycles sur les familles de variétés de Severi-Brauer

Soit p un nombre premier, k un corps contenant une racine primitive p -ième de 1 et $P(x) \in k[x]$ un polynôme séparable de degré $2p$. Soit K/k une extension cyclique de corps, de groupe $G = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}/p$.

Soit R_1 la $k[x]$ -algèbre

$$R_1 = \bigoplus_{i=0}^{p-1} K[x]\xi^i,$$

avec x central et les relations $\xi^p = P(x)$ et pour $\lambda \in K$, $\xi \cdot \lambda = \sigma(\lambda) \cdot \xi$. Alors R_1 est un ordre maximal, et donc en particulier héréditaire, dans l'algèbre simple centrale $(K/k, P(x))$ sur le corps $k(x)$.

Notons $P'(y) = y^{2p}P(1/y)$. Soit R_2 la $k[y]$ -algèbre

$$R_2 = \bigoplus_{i=0}^{p-1} K[y]\eta^i,$$

avec y central et les relations $\eta^p = P'(y)$ et, pour $\lambda \in K$, $\eta \cdot \lambda = \sigma(\lambda) \cdot \eta$. Alors R_2 est un ordre héréditaire sur $k[y]$.

Les identifications $y = 1/x$ et $y^2\xi = \eta$ permettent, sur $k[x, x^{-1}]$ et $k[y, y^{-1}]$, de recoller les deux ordres héréditaires en un faisceau \tilde{R} de tels ordres sur la droite projective \mathbf{P}_k^1 .

D'après M. Artin [1], le foncteur F sur la catégorie des \mathbf{P}_k^1 -schémas dont les points $F(S)$ sur un \mathbf{P}_k^1 -schéma affine S sont les idéaux à gauche du faisceau d'algèbres \tilde{R}_S qui sont localement libres de rang p comme faisceaux de O_S -modules, et qui sont localement facteurs directs comme O_S -modules de \tilde{R}_S , est représentable par un \mathbf{P}_k^1 -schéma projectif X' .

Au-dessus de l'ouvert de \mathbf{P}_k^1 où l'algèbre \tilde{R} est d'Azumaya, ce schéma X' se restreint en un schéma de Severi-Brauer relatif. Toujours d'après M. Artin [1, Thm. (1.4)], la fibre générique de ce \mathbf{P}_k^1 -schéma X' est la variété de Severi-Brauer sur le corps $k(\mathbf{P}^1) = k(x)$ associée à la $k(x)$ -algèbre simple centrale $(K/k, P(x))$.

Toujours d'après M. Artin, la composante connexe du schéma X' contenant la fibre générique est un k -schéma régulier $X = X(K/k, P)$, donc lisse sur k si $\text{car}(k) = 0$. Les fibres de $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ sont géométriquement connexes.

M. Artin ([1], voir aussi [7]), donne une description précise des fibres non lisses du morphisme projectif $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$, description dont nous n'aurons pas besoin ici.

Le théorème suivant est annoncé et partiellement démontré par P. Salberger dans sa thèse [12].

Théorème 6.1. — [12, Cor. 5.9] *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit $K = k(\mathbf{P}^1)$. Soit A une algèbre à division sur K d'indice premier p . Soit \tilde{R} un faisceau d'ordres maximaux de A sur \mathbf{P}_k^1 . Soit $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ le schéma comme ci-dessus. Soit s la somme des degrés sur k des points fermés de \mathbf{P}_k^1 au voisinage desquels la $O_{\mathbf{P}_k^1}$ -algèbre \tilde{R} n'est pas une algèbre d'Azumaya.*

Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à

$$N_0 = (1/2)(p-1)(s-2(p+1)/p)$$

est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle effectif.

Ce théorème généralise un résultat sur les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective [2]. Salberger donne un énoncé plus général, au-dessus d'une courbe de genre quelconque. Sa démonstration utilise une version de l'inégalité de Riemann pour les idéaux des ordres maximaux sur une courbe due à Witt [16], et reprise en particulier dans [14].

Corollaire 6.2. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, soit $N = N(p, s) \geq 1$ le plus petit entier congru à 1 modulo p et au moins égal à $(1/2)(p-1)(s-2(p+1)/p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *X possède un zéro-cycle de degré 1.*
- (b) *X possède un zéro-cycle effectif de degré N .*
- (c) *Le produit symétrique $\mathrm{Sym}^N X$ possède un k -point.*

Donnons un énoncé analogue pour toute k -variété projective et lisse k -birationnelle à X .

Le lemme suivant est une extension aux zéro-cycles du lemme de Lang–Nishimura [3, Lemme 3.1.1].

Lemme 6.3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k -variété lisse intègre et Y une k -variété propre. S'il existe une application k -rationnelle f de X vers Y , et si X possède un zéro-cycle effectif de degré N , alors Y possède un zéro-cycle effectif de degré N .*

Démonstration. — Soit z un tel zéro-cycle. On éclate le support du zéro-cycle. Ceci donne une k -variété lisse X' et une application k -rationnelle f' de X' vers Y , qui est définie sur le complémentaire d'un fermé de codimension 2 de X' . La fibre au-dessus d'un point fermé P dans le support de z est un espace projectif $\mathbf{P}_{k(P)}^{d-1}$. Il existe donc un zéro-cycle effectif z' de degré N dans l'ouvert de définition de f' . L'image de ce zéro-cycle par l'application f'_* est un zéro-cycle de degré N dans Y . \square

Lemme 6.4. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X et Y deux k -variétés propres et lisses, géométriquement connexes, k -birationnelles entre elles. Si pour un entier $N > 0$ tout zéro-cycle sur Y de degré N est rationnellement équivalent sur Y à un zéro-cycle effectif, et si X possède un zéro-cycle de degré N , alors X possède un zéro-cycle effectif de degré N .*

Démonstration. — Il existe des ouverts non vides $U \subset Y$ et $V \subset X$ qui sont k -isomorphes. Soit z un zéro-cycle sur X de degré N . Par un lemme de déplacement facile, ce zéro-cycle est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle de degré N à support dans V . On considère le zéro-cycle image

dans U . Il est de degré N . Sur Y , il est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif de degré N . Le lemme 6.3 établit l'existence d'un zéro-cycle de degré N sur X . \square

Nous pouvons maintenant énoncer le corollaire suivant du résultat de Salberger.

Théorème 6.5. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ un k -morphisme de k -variétés projectives et lisses géométriquement intègres dont la fibre générique est k -birationnelle à une variété de Severi-Brauer d'indice premier p , d'algèbre associée $A/k(\mathbf{P}^1)$. Soit s la somme des degrés sur k des points fermés de \mathbf{P}_k^1 où l'algèbre A a un résidu non trivial. Soit $N = N(p, s) \geq 1$ un entier congru à 1 modulo p et au moins égal à $(1/2)(p-1)(s-2(p+1)/p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) X possède un zéro-cycle de degré 1.
- (b) X possède un zéro-cycle effectif de degré N .
- (c) Le produit symétrique $\mathrm{Sym}^N X$ possède un k -point.

Démonstration. — Soit $A/K = k(\mathbf{P}^1)$ l'algèbre simple centrale associée à la fibre générique de π . Si A n'est pas une algèbre à division, alors c'est une algèbre de matrices, et la k -variété X est k -birationnelle à $\mathbf{P}_k^{p-1} \times_k \mathbf{P}_k^1$, donc à \mathbf{P}_k^p . Le groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle sur X est alors égal à \mathbb{Z} , engendré par la classe d'un point k -rationnel, et le théorème est clair.

Supposons que A est une algèbre à division. Soit $\pi : Y \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ un modèle donné par le théorème 6.1.

La considération d'une fibre lisse sur un k -point de \mathbf{P}_k^1 montre que X et Y possèdent soit un k -point soit un point fermé de degré p sur k . Ceci établit en particulier que (b) implique (a). Supposons (a). D'après ce qui précède, il existe un zéro-cycle de degré $N(p, s)$ sur X . Le théorème 6.1 et le lemme 6.4 donnent alors (b). Les énoncés (b) et (c) sont clairement équivalents. \square

Références

- [1] M. Artin, Left ideals in maximal orders, in *Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry*, LNM **917**, Springer-Verlag (1982) p. 182–193.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, L'équivalence rationnelles sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio math.* **39** (1979) 301–322.

- [3] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **320** (1980), 150–191.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, In tersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, II, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **373** (1987) 37–107 ; **374** (1987) 72–168.
- [5] J.-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi–Brauer and similar varieties, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **453** (1994) 49–112.
- [6] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel’s hypothesis and Salberger’s device, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **495** (1998) 1–28.
- [7] E. Frossard, Fibres dégénérées des schémas de Severi-Brauer d’ordres, *J. Alg.* **198** (1997), 362–387.
- [8] P. Gille et T. Szamuely, Central simple algebras and Galois cohomology, *Cambridge studies in advanced mathematics* **101** (2006).
- [9] J. Königsmann, Defining \mathbb{Z} in \mathbb{Q} , arxiv.org/abs/1011.3424v2, à paraître dans *Annals of Math.*
- [10] B. Poonen, The set of nonsquares in a number field is Diophantine, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no. 1, 165–170.
- [11] B. Poonen, Existence of rational points on smooth projective varieties, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009) 529–543.
- [12] P. Salberger, Class groups of orders and Chow groups of their Brauer–Severi schemes, in *K-Theory of orders and their Brauer–Severi schemes*, Thèse, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1985.
- [13] P. Salberger, Zero-cycles on rational surfaces over number fields, *Invent. math.* **91** (1988), no. 3, 505–524.
- [14] M. van den Bergh et J. van Geel, Algebraic elements in division algebras over function fields of curves, *Israel J. Math.* **52** (1985), 33–45.
- [15] A. Várilly-Alvarado et B. Viray, Higher dimensional analogues of Châtelet surfaces, *Bull. London Math. Soc.* **44** (2012), no. 1, 125–135.
- [16] E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen, *Math. Ann.* **110** (1934) 12–28.
- [17] O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d’une courbe de genre quelconque, *Duke Math. J.* **161** (2012) 2113–2166.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, CNRS & Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment
425, F-91405 Orsay Cedex, France • *E-mail* : `jlct@math.u-psud.fr`
JAN VAN GEEL, Universiteit Gent, Vakgroep Wiskunde, Krijgslaan 281, S22, B-9000 Gent,
België • *E-mail* : `jvg@cage.ugent.be`